Activitats de la SCM

Conferència inaugural del curs 2010-2011

El 24 de novembre de 2010 el doctor J. Girbau va pronunciar la conferència «L'equació d'Einstein del camp gravitatori», amb motiu de l'acte inaugural del curs 2010-2011 de la SCM. L'acte va constar de dues parts ben diferenciades: en la primera, el conferenciant va explicar com A. Einstein va arribar a formular la teoria general de la relativitat, i la segona es va dedicar al problema que es coneix amb el nom d'*estabilitat lineal* de l'equació d'Einstein, qüestió aquesta d'interès teòric i pràctic, perquè la linealització de l'equació d'Einstein dóna lloc a l'equació d'ones del camp gravitatori i, per tant, a poder postular l'existència d'aquestes ones.

La relativitat especial tracta dels fenòmens físics en absència de forces gravitatòries. L'espai on tenen lloc aquests fenòmens s'anomena l'*espai-temps* i ve modelat per l'anomenat *espai de Minkowski*, que és l'espai $\mathbb{R}^4$ dotat d'un cert producte escalar (o mètrica) η. Les quatre coordenades s'acostumen a escriure en l'ordre (x_1, x_2, x_3, t_x), les tres primeres espacials i l'última temporal. El producte escalar abans esmentat ve donat per

$$\eta(X, Y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - c^2t_xt_y \ ,$$

on c és la velocitat de la llum. Un observador inercial no és altra cosa que un sistema de referència a l'espai de Minkowski. Les transformacions de Lorentz, que relacionen les quatre coordenades de dos sistemes inercials, són les isometries de l'espai de Minkowski (aquelles que preserven el producte escalar). Aquesta construcció geomètrica (posterior a la formulació inicial d'Einstein) permet interpretar qualsevol problema cinemàtic en termes geomètrics, per exemple la contracció de les longituds i la dilatació del temps pel moviment uniforme. L'espai de Minkowski no és euclidià però és pla perquè les geodèsiques (aquelles corbes de mínima longitud que uneixen dos punts fixos de l'espai-temps) són les rectes de $\mathbb{R}^4$, que també són les trajectòries que descriuen les partícules lliures.

El problema que es planteja ara és com cal modificar l'esquema geomètric anterior per encabir-hi els camps gravitatoris. La solució que dóna Einstein és la de corbar l'espai-temps (i, per tant, modificar la seva mètrica). En un llenguatge més precís, es tracta de substituir l'espai de Minkowski $(\mathbb{R}^4, \eta)$ per una 4-varietat de Lorentz (V, g) convenient. Per tant, en la teoria de la relativitat general el camp gravitatori no actua directament sobre les partícules sinó que la seva acció es manifesta en la modificació de la mètrica de Minkowski η. Per a un observador de la varietat de Lorentz (V, g) resultant, la vida de les partícules serà descrita per una geodèsica de l'espai-temps (V, g) perquè no detectarà cap mena de força sobre aquestes.[1] Amb la diferència que ara, en general, les geodèsiques no seran rectes com en el cas de la mètrica de Minkowski η. Per a aquest observador les forces gravitatòries no existeixen sinó que són fruit d'una elecció de coordenades. De fet, si explicitem les equacions de les geodèsiques arribarem a un resultat ben conegut. Una corba $x(\tau)$ és una geodèsica si $\nabla_{\dot{x}}\dot{x} = 0$, que en coordenades s'escriu $d^2x^\lambda/d\tau^2 = -\sum \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}(dx^\mu/d\tau)(dx^\nu/d\tau)$. Els Γ s'anomenen *símbols de Christoffel* i depenen de les derivades primeres de la mètrica g. Per tant, l'expressió anterior es pot interpretar com l'equivalent relativista de la segona llei de Newton $F = ma$, amb $F = -m\nabla\Phi$ per a un potencial gravitatori Φ donat. A causa d'aquesta semblança, els components $g_{\alpha\beta}$ de g se'ls anomena *potencials gravitatoris*. A diferència del cas newtonià, però, no tenim un únic potencial Φ sinó deu, perquè g és un tensor simètric d'ordre 2 en una varietat de dimensió 4.

Com es determina la mètrica g? En física clàssica la resposta la dóna l'equació de Poisson $\Delta\Phi = 4\pi K\rho$. En relativitat general és l'equació d'Einstein, objecte d'aquesta conferència:

$$G(g) = \chi T \, .$$

Els dos tensors G i T són simètrics i d'ordre 2 i, per tant, l'equació d'Einstein és un sistema de deu equacions diferencials en les quals hi apareixen els deu potencials gravitatoris $g_{\alpha\beta}$. El tensor d'impulsió-energia T, que evidentment fa

[1] Observeu que d'aquesta manera el camp gravitatori actua sobre totes les partícules de la mateixa forma, independentment de la seva massa o estructura interna, que és el tret que diferencia la força gravitatòria de les altres forces fonamentals de la naturalesa.

el paper de la densitat ρ, ha de complir les equacions de conservació de la matèria $\mathrm{div}(T) = 0$. Tot plegat imposa sobre el tensor G les condicions següents: ha de ser d'ordre 2, simètric, de divergència nul·la i, per analogia amb l'equació de Poisson, ha de dependre fins a les derivades d'ordre 2 en g. Es pot veure que el tensor $\mathrm{Ric} - \frac{1}{2}Rg$ compleix tots els requisits anteriors (aquí Ric és el tensor de Ricci i R és la curvatura escalar). L'equació d'Einstein és, doncs, $\mathrm{Ric}(g) - \frac{1}{2}Rg = \chi T$, que també es pot escriure

$$\mathrm{Ric}(g) = \chi\{T - \frac{1}{2}\mathrm{tr}_g(T)g\}\,.$$

En absència de matèria, $T = 0$, obtenim $\mathrm{Ric}(g) = 0$. Si tenim en compte que el tensor de Ricci és una contracció del tensor de curvatura de la varietat, i si recordem que l'espai de Minkowski és pla, no és d'estranyar que una solució de $\mathrm{Ric}(g) = 0$ sigui $g = \eta$. O a l'inrevés, si $T \neq 0$ la mètrica de Minkowski deixa de ser una solució: la matèria corba l'espai-temps.

Una vegada establerta l'equació d'Einstein, cal preguntar-se per l'existència i unicitat de la solució, així com quines dades inicials són necessàries (problema de Cauchy). Cal, però, adonar-se d'una diferència substancial entre l'equació de Poisson i la d'Einstein: la primera obeeix a l'esquema clàssic de tenir en un costat la font del camp (la densitat ρ) i a l'altre un operador diferencial que actua sobre el camp Φ, que és la incògnita. En l'equació d'Einstein, en canvi, aquest esquema es trenca perquè la incògnita g també apareix en el segon membre. A més, cal tenir present que el tensor d'impulsió-energia ha de complir d'entrada dues condicions. Primera, ha de ser conservatiu, $\mathrm{div}(T) = 0$, la qual cosa comporta que aquestes quatre equacions s'hagin d'acoblar amb el sistema de deu equacions donat per l'equació d'Einstein. Segona, i com a conseqüència de la primera, el tensor T haurà de dependre de quatre variables que defineixin la distribució de la matèria en l'espai-temps, a fi de tenir el mateix nombre d'equacions que d'incògnites. Situem-nos, per exemple, en el cas del tensor d'impulsió-energia d'un fluid perfecte:

$$T = (\rho + p)u \otimes u + pg\ .$$

Les noves incògnites són la densitat ρ, la pressió p i el camp de velocitats u del fluid (de quatre components). En total sis incògnites, que es redueixen a quatre perquè s'imposa que u sigui unitari i que existeixi una equació d'estat que relacioni ρ i p.

Finalment, una altra diferència entre les dues equacions rau en l'estructura mateixa de l'equació diferencial. El laplacià euclidià $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ que apareix en l'equació de Poisson és un operador el·líptic i, per tant, molt ben estudiat en la literatura. En canvi, l'expressió en coordenades de la part principal del tensor de Ricci,

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} \simeq & \frac{1}{2} g^{\lambda\mu}(\partial_\lambda \partial_\alpha g_{\beta\mu} + \partial_\beta \partial_\mu g_{\lambda\alpha} \\ & - \partial_\lambda \partial_\mu g_{\beta\alpha} - \partial_\beta \partial_\alpha g_{\lambda\mu}) \end{aligned}$$

(aquí $\partial_\lambda \equiv \frac{\partial}{\partial x_\lambda}$), és bastant més complicada i d'entrada no pot ser classificada ni com el·líptica, ni hiperbòlica, ni parabòlica. Aquesta situació encara es veuria agreujada si el sistema $\mathrm{div}(T) = 0$ aportés derivades segones en g i en les altres incògnites que apareixen en l'expressió de T. En resum, per poder plantejar el problema de Cauchy cal imposar sobre T que depengui de quatre paràmetres i que el sistema $\mathrm{div}(T) = 0$ estigui desacoblat de $\mathrm{Ric}(g) = \chi\{T - \frac{1}{2}\mathrm{tr}_g(T)g\}$. Afegint-hi algunes condicions més tècniques, es pot demostrar que, si les dades de Cauchy pertanyen a uns certs espais (de Sobolev) i compleixen unes condicions de lligam sobre una hipersuperfície espacial de la varietat de Lorentz, el problema de Cauchy està ben posat (*well posed*), és a dir, que 1) la solució existeix, és única llevat difeomorfismes i és del mateix espai que les dades de Cauchy; i 2) la solució depèn contínuament de les dades inicials (estabilitat de Cauchy). L'expressió *llevat difeomorfismes* indica que, com que les equacions estan escrites en forma tensorial i per tant són vàlides en qualsevol referència, sempre es tindrà la llibertat d'escollir un cert sistema de coordenades.

Una vegada establertes les condicions que ens garanteixen l'existència i unicitat de l'equació d'Einstein, el pas següent hauria de ser trobar aquesta solució, és a dir, resoldre exactament l'equació d'Einstein. Però només en alguns casos en els quals l'espai-temps té simetria esfèrica això és possible. Només que considerem l'equació d'Einstein amb $T = 0$, $\mathrm{Ric}(g) = 0$, ens trobem amb una equació irresoluble exactament però de la qual coneixem una solució particular, que és $g = \eta$, la mètrica de Minkowski. Però podríem intentar cercar solucions properes a η de la for-

ma $\eta + h$ perquè si h és petit

$$\mathrm{Ric}(\eta + h) = \underbrace{\mathrm{Ric}(\eta)}_{=0} + D_\eta \mathrm{Ric}(h) + \cdots$$

i $\mathrm{Ric}(\eta + h) = 0$ per hipòtesi. És costum aleshores resoldre l'equació lineal $D_\eta \mathrm{Ric}(h) = 0$, en el benentès que $g = \eta + h$ serà una solució de $\mathrm{Ric}(g) = 0$, propera a η. Però això és només una hipòtesi i, per tant, té sentit definir el concepte següent: una equació és linealment estable si les solucions de la seva equació linealitzada són realment pròximes a les vertaderes solucions de l'equació original. El següent és un exemple d'una equació algebraica senzilla (perquè es pugui resoldre exactament) que no és estable per linealització: sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donada per $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Una solució particular de l'equació $f(x_1, x_2) = 0$ és $(0, 0)$ i les solucions més properes es troben en la direcció dels eixos de coordenades, perquè les solucions exactes són $x_1 = 0$ o $x_2 = 0$. En canvi, de l'equació linealitzada deduiríem erròniament que en qualsevol direcció hi trobaríem solucions, perquè en $(0, 0)$ la linealitzada és $0 \cdot h_1 + 0 \cdot h_2 = 0$ i qualsevol $h = (h_1, h_2)$ és solució. Aquesta inestabilitat és deguda al fet que no en totes les direccions que dóna l'equació linealitzada (en aquest exemple, totes) existeix una corba de solucions de l'equació original (aquí, els eixos de coordenades).[2] Precisament la definició estricta d'*estabilitat lineal* és la següent: una equació $f(x) = y_0$ és linealment estable (o estable per linealització) en $x = x_0$ si per a tota solució h de l'equació linealitzada $D_{x_0} f(h) = 0$ existeix una corba $\lambda \to x(\lambda)$ de solucions de l'equació original que és tangent a h en x_0.

El mateix A. Einstein va fer ús del mètode de linealització per poder postular l'existència de les ones gravitatòries. Imaginem que l'univers és descrit per un tensor d'impulsió-energia T petit, que podem considerar com una pertorbació de $T = 0$. La corresponent mètrica g complirà l'equació $\mathrm{Ric}(g) = \chi\{T - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(T)g\}$. Per ser T petit, g serà propera a η, $g = \eta + h$ amb h petit. Si anomenem $L(h)$ a la suma dels termes lineals en h de la diferència $\mathrm{Ric}(\eta+h) - \mathrm{Ric}(\eta)$, tindrem

$$\mathrm{Ric}(g) = \mathrm{Ric}(\eta + h) \simeq \mathrm{Ric}(\eta) + L(h) \ .$$

Fent $S = T - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(T)g$, veiem que l'equació d'Einstein $\mathrm{Ric}(g) = \chi S$ s'aproxima per $L(h) \simeq \chi S$. Einstein es va adonar que si, a més a més, s'imposa $\mathrm{div}(h) = 1/2d(\mathrm{tr}(h))$ l'equació anterior es transforma en

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) h_{\alpha\beta} = \chi S_{\alpha\beta} \ .$$

En el buit, $S = 0$ i obtenim l'equació d'ones.

És interessant observar que aquest procediment no respon a l'esquema de linealitzar una equació del tipus $f(x) = y_0$ amb y_0 fix de la qual sabem una solució particular x_0, $f(x_0) = y_0$, (en l'exemple anterior seria $y_0 = 0$), sinó al cas d'una equació del tipus $f(x) = y_0 + q$ amb q petit però variable, on coneixem una solució particular x_0 de $f(x) = y_0$ (en el cas d'Einstein, $x_0 = \eta$, $y_0 = 0$ i $q = T$). Aquesta nova situació requerirà una nova definició d'*estabilitat* no basada en el concepte de *tangència*, sinó en el fet de poder garantir un acotament de l'error comès en considerar les solucions de l'equació linealitzada en comptes de les solucions reals.

Tots aquests temes tractats en la conferència (relativitat general, plantejament del problema de Cauchy, nou concepte d'*estabilitat* i aplicacions) són estudiats en un llibre de recent publicació escrit pel conferenciant i per qui escriu aquestes línies. En particular, es pot assegurar que l'equació d'Einstein és estable en $g = \eta$ i que, per tant, la hipòtesi d'Einstein (a partir de l'equació de la qual es pot predir l'existència de les ones gravitatòries), és del tot correcta.

Lluís Bruna
Professor de matemàtiques de secundària

[2] El lector pot comprovar que en totes les altres solucions, $(a, 0)$ i $(0, a)$ amb $a \neq 0$, l'equació és estable.